www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES
2e épreuve

Concours National d'admission 1990

OPTION GÉNÉRALE

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé.

Il est joint à ce sujet une feuille de papier millimétré et une feuille de papier gausso-arithmétique ainsi qu'une table donnant les valeurs prises par la fonction de répartition de la loi normale de paramètres 0 et 1.
Attention : il ne sera délivré aucun autre exemplaire.

Voir table 4 en fin de volume

On considère l'espace vectoriel E des suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que l'on notera plus simplement : (u_n)) muni des opérations habituelles.
Le but du problème est l'étude de certains endomorphismes de E et de leur application à un problème de prévision.
Étant donné les réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ ($l\in\mathbb{N}^*$) on appelle moyenne mobile de coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ l'application M qui, à la suite de terme général u_n, associe la suite de terme général :

$$\alpha_0 u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \ldots + \alpha_{l-1} u_{n+l-1} = \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_k u_{n+k}$$

On notera : $M = [\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{l-1}]$ cette application.

Dans le cas où la moyenne mobile n'a pas que des coefficients nuls, α_{l-1} est le dernier coefficient non nul de la moyenne mobile et on dit alors que l est sa longueur. On notera : $l = l(M)$.
On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des moyennes mobiles (y compris la moyenne mobile nulle, dont tous les coefficients sont nuls et qui n'a pas de longueur).
On écrira simplement (Mu_n) pour désigner l'image par M de la suite (u_n).
Par exemple si M est la moyenne mobile [1; 1] de longueur 2 et si (u_n) est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = (-1)^n \quad \text{on a :} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad Mu_n = 0$$

I. *Un exemple concret :*
On considère la suite (u_n) telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = n + (-1)^n$

Écrire les 6 premiers termes de (u_n).
Soit M la moyenne mobile $[-1; -1; 1; 1]$ de longueur 4.
Écrire les 6 premiers termes de (Mu_n).

II. *Quelques propriétés*

1° *a)* Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel L et $M = [\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{l-1}]$. Montrer que (Mu_n) converge et déterminer sa limite.

b) Réciproquement, peut-on trouver une moyenne mobile M et une suite (u_n) ne convergeant pas telles que (Mu_n) converge?

c) Étant donné une moyenne mobile M de longueur 3, existe-t-il une suite (u_n) ne convergeant pas telle que (Mu_n) converge?

2° *a)* Montrer qu'une moyenne mobile est un endomorphisme de E.

b) Montrer que si M et N sont deux moyennes mobiles et λ et μ deux réels alors $\lambda M + \mu N$ est une moyenne mobile et, si M, N et $\lambda M + \mu N$ ont une longueur :

$$l(\lambda M + \mu N) \leqslant \max(l(M), l(N))$$

III. *Recherche d'une moyenne mobile particulière :*

1° *a)* On considère l'ensemble P des suites (a_n) de E telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+4} = a_n$.

Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base de P et donner sa dimension.

c) Si $M = [\alpha_0; \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3]$ comparer les deux réels :

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_{n+2} + \alpha_3 a_{n+3} \quad \text{et} \quad \alpha_0 a_{n+4} + \alpha_1 a_{n+5} + \alpha_2 a_{n+6} + \alpha_3 a_{n+7}, \quad \text{où } (a_n)\in P.$$

(Ma_n) est-elle élément de P?

d) On note $J = [1, 1, 1, 1]$. Établir que si $(a_n)\in P$ alors (Ja_n) est constante.

e) On désigne par Ker J le noyau de l'endomorphisme J de E.
Déterminer $P_0 = P \cap (\text{Ker } J)$
Montrer que $P = K \oplus P_0$ où K désigne le sous-espace vectoriel de E formé par les suites constantes.

2° *a)* A tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ on associe la suite (q_n) telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad q_n = Q(n)$.
Soit : $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to E$, $Q \mapsto (q_n)$ Montrer que ϕ est une application linéaire. Est-elle injective?

Tournez la page S.V.P.

b) En utilisant $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$ montrer que : $\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{l-1} = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (l-1)\alpha_{l-1} = 7 \\ \alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \ldots + (l-1)^2\alpha_{l-1} = 49 \end{cases}$

est une condition nécessaire et suffisante pour que $M = [\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{l-1}]$ vérifie : $\forall (x_n) \in \text{Im } \phi, \quad (Mx_n) = (x_{n+7})$

où Im ϕ désigne l'ensemble image par ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est-à-dire : $\phi\langle \mathbb{R}_2[X] \rangle$.

c) Déterminer $P \cap \text{Im } \phi$ et en donner une base.

d) En déduire une base de $P_0 \oplus \text{Im } \phi$.

3° Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une moyenne mobile $F = [\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_6]$ de longueur 7 vérifie :

$\forall (x_n) \in P, \quad (Fx_n) = (x_{n+7})$ est : $\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_6 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$

4° Utiliser les résultats précédents pour trouver toutes les moyennes mobiles F de longueur 7 telles que :

$$\begin{cases} \forall (x_n) \in P, \quad (Fx_n) = (x_{n+7}) \\ \forall (x_n) \in \text{Im } \phi, \quad (Fx_n) = (x_{n+7}) \end{cases}$$

On exprimera tous les coefficients de F en fonction de $\alpha_0 = \alpha$ et l'on notera F_α une telle moyenne mobile.

IV. *Application à un problème de prévision.*

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres 0 et σ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).

Soit (a_n) une suite de $P_0 \oplus \text{Im } \phi$. On pose $X_n = a_n + \varepsilon_n$ et $F_\alpha X_n = \sum_{i=0}^{6} \alpha_i X_{i+n}$

1° Montrer que $(F_\alpha X_n)$ est une suite de variables aléatoires dont on précisera l'espérance et dont on montrera que la variance commune notée $(\sigma_\alpha)^2$ est $(12\alpha^2 - 16\alpha + 11)\sigma^2$.

2° Établir que σ_α^2 passe par un minimum unique pour une valeur β de α que l'on déterminera.
On admettra que $F_\beta X_n - X_{n+7}$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

V. *Étude d'un exemple*

Le relevé trimestriel des ventes d'une succursale d'une grande marque automobile donne le tableau suivant :

Année → / Trimestre ↓	1986	1987	1988	1989	1990
1	$x_0 = 130$	$x_4 = 144$	$x_8 = 162$	$x_{12} = 183$	$x_{16} = 209$
2	$x_1 = 148$	$x_5 = 163$	$x_9 = 182$	$x_{13} = 204$	
3	$x_2 = 131$	$x_6 = 148$	$x_{10} = 167$	$x_{14} = 190$	
4	$x_3 = 170$	$x_7 = 187$	$x_{11} = 208$	$x_{15} = 232$	

1° Tracer sur la feuille de papier millimétré la suite $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant 16}$
(n en abscisses : unité 1 cm; x_n en ordonnées : unité 2 mm)
On note G la moyenne mobile $\left[\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; 1; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$.
Soit $y_n = Gx_n$ et (z_n) la suite telle que $z_{n+7} = y_n$.
Tracer la suite (z_n) sur le même graphique.

2° On veut vérifier que $z_n - x_n$ suit une loi normale.
Pour cela on classe les différentes valeurs de $z_n - x_n$ par ordre croissant : $V_1 < V_2 < \ldots < V_p$ et l'on considère les classes $]-\infty; V_1]$, $]V_1; V_2]$, $]V_2; V_3]$, ...,-$]V_{p-1}; V_p]$ dont on détermine les effectifs.
Tracer alors la droite de Henry.

3° En supposant que la suite (x_n) est élément de $P_0 \oplus \text{Im } \phi$ montrer que l'espérance mathématique du nombre de voitures vendues au second trimestre 1990 est égale à $\frac{694}{3}$.

VI. *Application*

On suppose que le nombre de voitures vendues dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) et que les ventes des journées successives sont indépendantes. Sachant qu'il sera travaillé 68 jours au cours du second trimestre 1990, déterminer λ puis, à l'aide de la table jointe au sujet, fixer les nombres de voitures n_1 et n_2 tels que :

$$\text{Ent}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) = \text{Ent}\,(E(x_{17})) \qquad P(x_{17} \notin]n_1, n_2[) \leqslant 0{,}05$$

où $E(x_{17})$ désigne l'espérance mathématique de x_{17} et Ent (p) représente la partie entière du réel p.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail